

NEURČITÝ INTEGRÁL

1) Základní vzorce (platí na definičním oboru integrandu)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad x > 0, \quad n \in \mathbf{R}, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Linearita integrálu

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Pomocí základních vzorců a linearity spočtete integrály z následujících funkcí:

$$\text{a) } x^3 - 3\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[4]{x^5}}, \quad \text{b) } \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{c) } \operatorname{cotg}^2 x.$$

2) Substituce

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left[\begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right] = \int f(t) dt = F(t) = F(\varphi(x)).$$

$$\text{a) } \int x \sqrt{1+2x^2} dx, \quad \text{b) } \int x^3 \sqrt{x^4+3} dx, \quad \text{c) } \int \sin^4 x \cos x dx$$

$$\text{d) } \int a^{\sin x} \cos x dx, \quad \text{e) } \int x e^{2x^2} dx, \quad \text{f) } \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$\text{g) } \int \frac{x^4}{\sqrt{3x^5+7}} dx, \quad \text{h) } \int \frac{2x^3}{\sqrt{(5x^4-1)^3}} dx, \quad \text{i) } \int \frac{3x^4}{\sqrt[3]{(3x^5-1)}} dx,$$

$$\text{j) } \int 2x^2 \sqrt[4]{(x^3+2)^3} dx, \quad \text{k) } \int 2x^3 \sqrt[3]{(x^4+1)^2} dx, \quad \text{l) } \int \frac{2x}{\sqrt[4]{x^2+1}} dx.$$

Vzorce

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad \text{kde } \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \text{a) } \int \frac{x^2}{x^3+4} dx, \quad \text{b) } \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx, \quad \text{c) } \int (2x+5)^{10} dx, \\ & \text{d) } \int \cos(4x+2) dx, \quad \text{e) } \int \frac{1}{x \ln x} dx, \quad \text{f) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{4x-3}} dx. \\ & \text{g) } \int a^{2x-7} dx, \quad \text{h) } \int \frac{2x+3}{x^2+3x+8} dx, \quad \text{i) } \int \frac{e^x}{e^x+3} dx \\ & \text{j) } \int \frac{e^{3x-1}}{e^{3x-1}+3} dx, \quad \text{k) } \int \frac{\cos(x+2)}{2-\sin(x+2)}, \quad \text{l) } \int \frac{x^3+1}{x^4+4x+5} dx. \end{aligned}$$

Vzorce

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ \int \frac{1}{x^2-a^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & \text{a) } \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx, \quad \text{b) } \int \frac{1}{x^2+3x+3} dx, \quad \text{c) } \int \frac{1}{x^2-3x+2} dx, \\ & \text{d) } \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx, \quad \text{e) } \int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} dx, \quad \text{f) } \int \frac{1}{\sqrt{9x^2+6x}} dx. \end{aligned}$$

5) Per partes

$$\begin{aligned} \int f(x) g'(x) dx &= f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \\ & \text{a) } \int x \cos 2x dx, \quad \text{b) } \int x e^{-2x} dx, \quad \text{c) } \int \arccos x dx, \\ & \text{d) } \int \cos^2 2x dx, \quad \text{e) } \int e^x \cos 2x dx, \quad \text{f) } \int x^2 \sin x dx \end{aligned}$$

6) Parciální zlomky

$$\begin{aligned} & \text{a) } \int \frac{1}{x-4} dx, \quad \text{b) } \int \frac{1}{5x+6} dx, \quad \text{c) } \int \frac{x-1}{x^2+1} dx, \\ & \text{d) } \int \frac{3x+2}{x^2+4x+5} dx, \quad \text{e) } \int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx, \quad \text{f) } \int \frac{x+4}{x(x-2)^2} dx. \\ & \text{g) } \int \frac{x^2+3x}{(x+1)(x+2)(x-1)} dx, \quad \text{h) } \int \frac{1-2x}{(x+1)(x^2+1)} dx, \quad \text{i) } \int \frac{x+2}{x(x^2+4x+5)} dx. \end{aligned}$$

Výsledky (integrační konstantu vynecháváme)

- 1) a) $\frac{x^4}{4} - 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$, b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$, c) $-\cotg x - x$.
- 2) a) $\frac{1}{6}\sqrt{(1+2x^2)^3}$, b) $\frac{1}{6}\sqrt{(x^4+3)^3}$, c) $\frac{\sin^5 x}{5}$,
d) $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}$, e) $\frac{1}{4}e^{2x^2}$, f) $-\ln|\cos x|$.
g) $\frac{2}{15}\sqrt{3x^5+7}$, h) $-\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{(5x^4-1)}}$ i) $\frac{3}{10}\sqrt[3]{(3x^5-1)^2}$,
j) $\frac{8}{21}\sqrt[4]{(x^3+2)^7}$ k) $\frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^4+1)^5}$ l) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{(x^2+1)^3}$.
- 3) a) $\frac{1}{3}\ln|x^3+4|$, b) $-\ln|1+\cos x|$, c) $\frac{(2x+5)^{11}}{22}$, d) $\frac{1}{4}\sin(4x+2)$,
e) $\ln|\ln x|$, f) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(4x-3)^2}$, g) $\frac{a^{2x-7}}{2\ln a}$, h) $\ln|x^2+3x+8|$,
i) $\ln|e^x+3|$, j) $\frac{1}{3}\ln|e^{3x-1}+3|$, k) $-\ln|2-\sin(x+2)|$, l) $\frac{1}{4}\ln|x^4+4x+5|$.
- 4) a) $\arctg(x+1)$, b) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$, c) $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$
d) $\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+1}|$, e) $\arcsin\frac{x-3}{3}$, f) $\frac{1}{3}\ln|3x+1+\sqrt{(3x+1)^2-1}|$.
- 5) a) $\frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}$, b) $-\frac{e^{-2x}}{4}(1+2x)$, c) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$,
d) $\frac{2x+\sin 2x\cos 2x}{4}$, e) $\frac{e^x(\cos 2x+2\sin 2x)}{5}$, f) $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x$.
- 6) a) $\ln|x-4|$, b) $\frac{1}{5}\ln|5x+6|$, c) $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctg x$,
d) $\frac{3}{2}\ln|x^2+4x+5| - 4\arctg(x+2)$, e) $2\ln|x+2| - \ln|x+1|$, f) $\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{3}{x-2}$,
g) $\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$, h) $\frac{3}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctg x$,
i) $\frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x^2+4x+5| + \frac{1}{5}\arctg(x+2)$.

Řešení vybraných příkladů

$$2) \text{ a) } \int x\sqrt{1+2x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = 1+2x^2 \\ 2t dt = 4x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{\sqrt{(1+2x^2)^3}}{6}.$$

Můžeme rovněž použít následující substituce

$$\int x\sqrt{1+2x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+2x^2 \\ dt = 4x dx \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{(1+2x^2)^3}}{6},$$

integrování je pro někoho možná maličko složitější.

$$\mathbf{3) a)} \int \frac{x^2}{x^3 + 4} dx = \left[\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 4 \\ f'(x) = 3x^2 \end{array} \right] = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 4|.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4) b)} \int \frac{1}{x^2 + 3x + 3} dx &= \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = \\ = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right) \end{array} \right] = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \frac{2x+3}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \end{array} \right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5) c)} \int \arccos x dx &= \left[\begin{array}{l} u' = 1, v = \arccos x \\ u = x, v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right] = \underbrace{x \arccos x}_A + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t^2 = 1 - x^2 \\ 2t dt = -2x dx \end{array} \right] \\ &= A - \int \frac{t dt}{t} = A - t = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{6) c)} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} x.$$

$$\mathbf{6) f)} \text{ Rozložíme integrand na parciální zlomky: } \frac{x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

$$\text{převědeme na společného jmenovatele: } \frac{x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{x(x-2)^2}$$

a porovnáme koeficienty u stejných mocnin v čitatelích. Dostaneme soustavu pro neznámé A, B, C :

$$x^2 : A + B = 0,$$

$$x^1 : -4A - 2B + C = 1,$$

$$x^0 : 4A = 4, \quad \text{ kterou řeší } A = 1, \quad B = -1, \quad C = 3.$$

Nebo do čitatele dosadíme kořeny jmenovatele.

$$x = 0 : 4 = 4A \Rightarrow A = 1,$$

$x = 2 : 6 = 2C \Rightarrow C = 3$ Konstantu B vypočítáme např. z rovnice, kterou jsme dostali porovnáním koeficientů u $x^2 : A + B = 0$.

Odtud již snadno dospějeme k výsledku:

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx = \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| - \frac{3}{x-2}.$$